数理解析研究所講究録
第 1691 巻 2010 年 136-141

片方のみがタイを持つ安定結婚問題に対する 25/17 近似アルゴリズム

柳澤 弘揮　　宮崎 修一[†]　　岩間 一雄[‡]

概要

タイと不完全なリストを含む安定結婚問題 (MAX SMTI) において、最大マッチングを求める問題は NP 困難であることが知られている。近似度の下限は 33/29 (> 1.1379) であり、現時点で最良の近似アルゴリズムの近似度は 1.5 である。MAX SMTI はタイを片方のみに制限しても NP 困難であり、近似度の下限は 21/19 (> 1.1052) である。この制限を加えても、近似度が 1.5 より良いアルゴリズムは知られていなかった。本稿では、タイを片方に制限した場合の近似度を 25/17 (< 1.4706) に改良する。

キーワード: 安定結婚問題、MAX SMTI, 近似アルゴリズム、整数計画問題、線形計画緩和

1 はじめに

安定結婚問題 [1, 3] は、n 人の男性と n 人の女性、各人の異性全員に対する全順序の希望リストが与えられたとき、「安定」なマッチングを求める問題である。あるマッチング M において、ある男女が互いに M におけるパートナーよりも希望リストの上位に書いているとき、その男女のペアをブロッキングペアと呼び、そのようなペアを含まないマッチングのことを「安定マッチング」という。Gale と Shapley は、全ての例題が少なくとも一つの安定マッチングを持つことを示し、それを見つける $O(n^2)$ 時間アルゴリズム (Gale-Shapley algorithm) を構築した [1]。

IBM 東京基礎研究所
[†]京都大学学術情報メディアセンター
[‡]京都大学情報学研究科

安定結婚問題は、研修医の病院への配属 [3] や学生の学校への配属 [18] 等への応用がある。こうした応用では、希望リストが異性全員を全順序で記述しなければばならないという制約は非現実的である。そこで、不完全なリストやタイを認めるという条件緩和を考えるのが自然である。(タイを認めた場合の安定性の定義は三種類ある [3, 6] が、本稿では最も自然な定義である弱安定性を採用する。) こうした条件緩和をおこなっても、少なくとも一つの安定マッチングが存在し、かつ、それを見つける多項式時間アルゴリズムが存在することが知られている。

しかし、安定マッチングの「サイズ」について考えると、状況は大きく変わる。元の安定結婚問題や、これにタイのみを認めた問題では、問題の定義より、安定マッチングは完全マッチングとなるのでマッチングの大きさは一定であった。また、不完全なリストのみを認めた問題では、安定マッチングは完全マッチングではなくなるが、例題毎に安定マッチングのサイズが一意に決まることが知られている [2]。よって、こうした制限の緩和を行った場合でも、多項式時間で最大サイズの安定マッチングを求めることができる。

ところが、タイと不完全なリストの両方の緩和を同時に行うと、安定マッチングのサイズは一意には定まらず、最大マッチングを求める問題 MAX SMTI (MAXimum Stable Marriage with Ties and Incomplete lists) は、NP 困難であることが知られている [9, 14]。安定マッチングは極大マッチングであるから、近似度 2 の多項式時間アルゴリズムは容易に構築できる。

この問題に対しては、これまで多くの改良が積み

重ねられてきた。まず、局所探索によって各反復で安定マッチングのサイズを増やしていくアルゴリズム [10, 11] が構築されたが、n が大きいときには近似度が 2 に近づいてしまうものであった。初めての近似度が 2 より真に良いアルゴリズムは、この局所探索の改良として岩間らにより構築され、近似度が 1.875 であることが示された [12]。その後、Király [13] が全く異なるアイデアのアルゴリズムにより近似度を 5/3 に改良した。彼のアルゴリズムは、Gale-Shapley アルゴリズムを各男性が同じ女性に対して二度以上プロポーズ可能となるように変更し、さらに、男性と女性が交互にプロポーズするように改良したものである。そして、McDermid [15] は Gallai-Edmonds decomposition を活用することで、Király のアルゴリズムをさらに改良し、現時点で最良の近似度 1.5 を達成した。この問題の近似度の下限については 33/29 (> 1.1379) であることが示されているだけである [19]。

与えられた例題に対して、最大サイズの安定マッチングを M_{opt}、ある安定マッチングを M とおくと、この二つを重ね合わせたものは二部グラフとみなすことができる。このグラフ内の連結成分は全て、パスまたは閉路である。もし全ての連結成分が、M_{opt} の枝 2 本と M の枝 1 本で構成される長さ 3 のパスであれば、$|M_{opt}| = 2|M|$ であるから、近似度 2 の最悪例題に対応する。上述した近似アルゴリズムは全て、この長さ 3 のパスをなるべく除去するように設計されている。近似度 1.875 [12] という結果は、長さ 3 のパスを（M に対する）ある割合だけ除去することにより達成された。Király のアルゴリズム [13] はこれらをさらに除去し近似度を改善した。また、タイを片方にのみ認めた場合には、完全に除去することに成功し、近似度 1.5 を達成している。そして、McDermid [15] は一般の場合にもこれらを完全に除去することに成功したのである。

よって、近似度が 1.5 より良いアルゴリズムを得るためには、長さ 5 以上のパスを除去する方法について考える必要があるが、これまでのアプローチの延長線上では難しいと思われる。本稿では、整数計画問題 (IP) と線形計画 (LP) 緩和を利用することにより、長さ 5 以上のパスの除去を試みた。

本稿の結果　本稿では、片方のみがタイを持つ安定結婚問題について、近似度を 25/17 (< 1.4706) に改善した。この問題の近似度の下限は 21/19 (> 1.1052) であることが知られている [5]。

我々のアルゴリズムは、IP と LP 緩和を利用して、Király の GSA1 アルゴリズム [13] を拡張したものである。Gale-Shapley アルゴリズムでは男性が女性にプロポーズしていくアルゴリズム（詳しくは [3] を参照されたい）であったが、GSA1 では各男性が複数回のプロポーズができるという点で異なる。（McDermid [15] の用語で説明すると）各男性は promoted かどうかのフラグを持ち、初期段階では各男性は promoted ではないが、希望リストの女性全員に一度プロポーズを行った後は promoted の状態になりプロポーズを希望リストの最初からやり直す。女性は、同順位の複数の男性からプロポーズを受けると、状態が promoted である男性からのプロポーズを優先して受け入れる。我々のアルゴリズムでは、この promoted かそうでないかの二つしかなかった状態を、LP 緩和解を利用して、もっと多くの状態に分類する。

MAX SMTI において、タイを片方に制限するのは、現実的な制限である。たとえば、スコットランドにおける研修医の病院への配属システムの例では、各病院はタイを一つしか持たず、各研修医は全順序の希望リストを使用することが報告されている [7]。

関連研究　上述したように、MAX SMTI は 1.5 近似可能だが、P=NP でない限り 33/29 (> 1.1379) より良い近似度は達成できない [19]。各男性の希望リストの長さを 2 に制限すると、女性のタイの長さによらず多項式時間で解くことができるが、各人の希望リストの長さを 3 に拡大すると NP 困難であることが知られている [8]。Halldórsson ら [4] は、タイを片方のみに制限し、タイの長さを 2 に制限したとき、平均近似度が 10/7 (< 1.4286) の確率アルゴリズムを与えている。

2 準備

MAX SMTI では、n 人の男性、n 人の女性、各人の希望リスト（タイを含んで良く、かつ、異性全員が書かれているとは限らない）が入力 I として与えられる。ある人 p が、異性 q を希望リストに書いているとき、q は p にとって受け入れ可能であると言う。一般性を失うことなく、m が w を受け入れ可能なとき、w も m を受け入れ可能だとみなせる。マッチング M は、互いに受け入れ可能な男女のペア (m, w) の集合であり、各人は M 中で二度以上現れない。$(m, w) \in M$ ならば、m と w は M でペアになっていると言い、$M(m) = w$ や $M(w) = m$ と表記する。ある人 p が M に現れないとき、p は M において独身であると言うことにする。

ある男性 m が w_i を w_j より真に上位に書いているとき、$w_i \succ_m w_j$ と書く。ある男性 m の希望リストで w_i と w_j がタイになっている（$w_i = w_j$ の場合を含む）とき、$w_i =_m w_j$ と書く。$w_i \succeq_m w_j$ は、$w_i \succ_m w_j$ または $w_i =_m w_j$ が成り立つということを意味している。女性についても同様に記述する。m と w がブロッキングペアであると言うのは、以下の三条件が全て成立したときである: (i) $M(m) \neq w$ だが m と w は互いに受け入れ可能、(ii) $w \succ_m M(m)$ もしくは m が M において独身、(iii) $m \succ_w M(w)$ もしくは w が M において独身。マッチング M に対するブロッキングペアが存在しないとき、M は安定であるという。MAX SMTI は、最大サイズの安定マッチングを見つける問題である。

最大化問題に対する近似アルゴリズムの近似度は、$opt(I)$ と $T(I)$ をそれぞれ最適解とアルゴリズム T の出力解としたとき、全ての例題 I の中で $opt(I)/T(I)$ が最大となる値で定めることにする。

MAX SMTI の例題 I が与えられたとき、以下のような定式化 $IP(I)$ が可能である（これは、元の安定結婚問題 [16, 17] に対する定式化を一般化したものである）。

$$\text{Maximize:} \sum_i \sum_j x_{i,j}$$

Subject to:

$$\sum_i x_{i,w} \quad 1 \quad \forall w \tag{1}$$

$$\sum_j x_{m,j} \quad 1 \quad \forall m \tag{2}$$

$$\sum_{j \succeq_m w} x_{m,j} + \sum_{i \succeq_w m} x_{i,w} \quad x_{m,w} \quad 1 \quad \forall (m, w) \in A \tag{3}$$

$$x_{m,w} = 0 \quad \forall (m, w) \notin A \tag{4}$$

$$x_{m,w} \in \{0, 1\} \quad \forall (m, w) \tag{5}$$

ここで、A は互いに受け入れ可能な男女のペアを示す。つまり、$(m, w) \in A$ ならば、m と w は互いに希望リストに書いているということである。この定式化では、$x_{m,w} = 1$ となる男 m と女 w がペアになっていることを示している。制約式 (3) は、ペア (m, w) がブロッキングペアでないことを示している。もし $x_{m,w} = 1$ ならば、左辺の全ての項が 1 となり、制約式 (3) は満たされる。もし $x_{m,w} = 0$ ならば、左辺の第一項もしくは第二項が 1 にならなければならず、男性 m が女性 w と同等以上の人とペアになっているか、女性 w が男性 m と同等以上の人とペアになっていることを示している。

制約式 (5) を $0 \quad x_{m,w} \quad 1$ で置き換えることにより $IP(I)$ を線形緩和したものを $LP(I)$ と書く。

3 近似アルゴリズム

ここでは、タイを片方に制限した MAX SMTI（女性のみがタイを持つ）に対する近似アルゴリズムを与える。上述したように、我々のアルゴリズムは、Király の GSA1 [13] を拡張したものである。各男性 m に対して、変数 $f(m)$ を用意する。$f(m)$ の初期値は 0 で、アルゴリズムがすすむにつれ増加する。また、Y は男性の集合を保持する変数である。

Algorithm I

Step 1. 与えられた例題 I を整数計画問題 $IP(I)$ として定式化し、その線形計画緩和 $LP(I)$ の最適解 $x^*(= \{x^*_{i,j}\})$ を得る。

Step 2. $M := \emptyset, Y :=$ 男性集合 とおく。

Step 3. 各男性 m について $f(m) := 0$ とおく。

Step 4. M で独身な男性 m を Y から取り出す。そのような男性が Y 中にいないときは、M を出力して停止。

Step 5. m がこれまで一度以上プロポーズした女性を（m の希望リストの上位から順に）$w_1, \ldots, w_k$ とおく。もしそのような女性が一人もいなければ（m がまだ誰にもプロポーズしていない場合は）Step 6 へ。そうでない場合は、m にこの順序で女性にプロポーズさせ、プロポーズが受け入れられたら Step 4 へ戻る。全女性から振られた場合は、Step 6 へ。（女性がプロポーズを受け入れる条件および受け入れた場合の処理については、後述する。）

Step 6. もし $f(m) > 2$ ならば、m を Y から削除して Step 4 へ。そうでなければ、Step 7 へ。

Step 7. まだ m がプロポーズしていない女性のなかで最上位の女性を w とおく。既に全員にプロポーズ済みで、そのような w が存在しない場合は、$f(m) := f(m) + 1$ として Step 4 へ。$f(m) := f(m) + x^*_{m,w}$ としたうえで m に w へプロポーズさせる。結果に関わらず、Step 4 へ。

男性 m が女性 w にプロポーズしたとき、w は以下の三つの条件のうち少なくとも一つが成立するとき、受け入れるものとする: (a) w は M で独身、(b) $m \succ_w M(w)$、(c) $m =_w M(w)$ かつ $f(m) > f(M(w))$。そうでない場合は、w は m のプロポーズを拒否する。w が m のプロポーズを受け入れたときは、(a) が成立した場合は、$M := M \cup \{(m, w)\}$ の操作を行い、(b) もしくは (c) が成立した場合は $M := M \cup \{(m, w)\} \setminus \{(M(w), w)\}$ の操作を行う。

男性 m が女性 w にプロポーズするときはいつも、w より上位に書いている女性全員に $f(m)$ $\sum_{j \succ_m w} x^*_{m,j}$ の状態でプロポーズし、全員から拒否されていることに注意。また、男性 m が希望リストの最下位の女性に初めてプロポーズするときは、$f(m)$ 1 であることにも注意。そして、男性 m が最終的に M において独身である場合、$f(m) > 2$ の状態で女性全員にプロポーズしたことがあり、アルゴリズム終了時点でも $f(m) > 2$ が成り立つことに注意。

Algorithm I が多項式時間で終了することは容易に示せる。また、正しい解が出力されることは、[13] と同様に証明でき（証明は略）、以下の補題が成り立つ。

補題 3.1 *Algorithm I* の出力 M は安定マッチングである。

4 近似度の解析

4.1 解析の概要

例題 I について考える。I の最適解を M_{opt}、Algorithm I の出力解を M とおく。そして、M_{opt} と M を重ね合わせてつくった二部グラフを $G = (U, V, E)$ とおく。（ここで U は男性の集合、V は女性の集合。）以降、簡単のため、G の頂点と I 中の人は特に区別しない。$m \in U$ と $w \in V$ が M でペアになっているとき、(m, w) は E に含まれ、M-枝と呼ぶことにする。同様に、$m \in U$ と $w \in V$ が M_{opt} でペアになっているとき、(m, w) は E に含まれ、M_{opt}-枝と呼ぶことにする。もし (m, w) が M と M_{opt} の両者に含まれるとき、G は並行枝を持つ。G の各頂点の次数は最大でも 2 なので、G の各連結成分は、孤立点・パス・閉路のいずれかであることに注意。Király の GSA1 [13] と同様に、以下の命題が成立する（証明略）。

命題 4.1 *[13]* M_{opt}*-枝で始まり* M_{opt}*-枝で終わる長さ 3 のパスは存在しない。*

M で独身な男女の集合を S とおく。また、G を利用して、M を P, Q, R の三つに分解する: M_{opt}-枝で始まり M_{opt}-枝で終わる長さ 5 のパスについて、独身の男性から順にパスをたどって $m_s, w_p, m_p, w_q, m_q, w_s$ とおく。つまり、$m_s = M_{opt}(w_p)$, $m_p = M(w_p)$, $w_q = M_{opt}(m_p)$, $m_q = M(w_q)$, $w_s = M_{opt}(m_q)$。そして、このような (m_p, w_p) の集合を P、(m_q, w_q) の集合を Q とおき、残りを $R = M \setminus (P \cup Q)$ とおく。

G の連結成分に長さ 1 のパス (孤立辺) は存在しないことに注意。なぜなら、たとえば M_{opt}-枝 (m, w) が存在するとすると、(m, w) が M のブロッキングペアになり、M の安定性に矛盾するから。また、命題 4.1 より、G は M_{opt}-枝で始まり M_{opt}-枝で終わる長さ 3 のパスを含まないことに注意。次に、M_{opt}-枝で始まり M_{opt}-枝で終わる長さ 5 のパスは、三本の M_{opt}-枝、P と Q からそれぞれ一本の M-枝を含むので、長さ 5 のパスに含まれる M_{opt}-枝はちょうど $\frac{3}{2}(|P| + |Q|)$ 本となる。これ以外の G の連結成分では、M-枝の数に対する M_{opt}-枝の数の割合は最大でも $\frac{4}{3}$ なので、下記の補題が成り立ち、$|M_{opt}|$ の上限を $|P|, |Q|, |R|$ で表現できる。

補題 4.2 $|M_{opt}| \quad \frac{3}{2}(|P| + |Q|) + \frac{4}{3}|R|$ が成立する。

$|M| = |P| + |Q| + |R|$ なので、補題 4.2 より、$|M_{opt}| \quad \frac{3}{2}|M| \quad \frac{1}{6}|R|$ が言える。しかし、$|R| = 0$ ならば、近似度 1.5 であることしか示せず、Király の GSA1 [13] の近似度と同じになってしまう。

我々のアルゴリズムの解析では、これに加えて $|M_{opt}|$ に別の上限を与える: まず、$x^*_{i,j}$ を $LP(I)$ の最適解 x^* の各 $x_{i,j}$ の値とする。もし $m, w \in S$ について $x^*_{m,w} > 0$ ならば、$LP(I)$ の制約式 (4) から $(m, w) \in A$ がいえるので、(m, w) が M のブロッキングペアになり矛盾。よって、$\sum_{i,j \in S} x^*_{i,j} = 0$ が成り立つ。ここで、部分集合 $X \quad M$ について、$x^*(X)$ を下記のように定義する:

$$x^*(X) = \sum_{(m,w) \in X} \left(\sum_j x^*_{m,j} + \sum_i x^*_{i,w} + \sum_{j \in S} x^*_{m,j} + \sum_{i \in S} x^*_{i,w} \right).$$

このとき、上述したように $\sum_{i,j \in S} x^*_{i,j} = 0$ なので、$x^*(P) + x^*(Q) + x^*(R) = 2\sum_i \sum_j x^*_{i,j}$ が成立するのが容易に確かめられる。よって、$LP(I)$ の目的関数値は、$(x^*(P) + x^*(Q) + x^*(R))/2$ と等しくなるので、$|M_{opt}| \quad (x^*(P) + x^*(Q) + x^*(R))/2$ が成立する。ここで、次の主要な補題が成立する。その証明は省略する:

補題 4.3 $x^*(P) + x^*(Q) + x^*(R) \quad \frac{2}{5}(7|P| + 7|Q| + 9|R|)$ が成立する。

これより、$|M_{opt}| \quad \frac{1}{5}(7|P| + 7|Q| + 9|R|)$、つまり、$5|M_{opt}| \quad 7(|P| + |Q|) + 9|R|$ が成り立つ。補題 4.2 より $12|M_{opt}| \quad 18(|P|+|Q|)+16|R|$ が成り立つ。両者を足し合わせると $17|M_{opt}| \quad 25(|P|+|Q|+|R|) = 25|M|$。よって、以下の定理が成り立つ:

定理 4.4 *Algorithm I* の近似度は 25/17 以下である。

5 おわりに

タイを片方に制限した MAX SMTI に対し、近似度を 1.5 から 25/17 (< 1.4706) に改善した。この結果を改善、あるいは、タイを男女両方に認める問題についても近似度を改善することが、今後の課題である。

参考文献

[1] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 69, pp. 9–15, 1962.

[2] D. Gale and M. Sotomayor, "Some remarks on the stable matching problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 223–232, 1985.

[3] D. Gusfield and R. W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, MIT Press, Boston, MA, 1989.

[4] M. M. Halldórsson, K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa, "Randomized approximation of the stable marriage problem," *Theoretical Computer Science*, Vol. 325, No. 3, pp. 439–465, 2004.

[5] M. M. Halldórsson, K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa, "Improved approximation results for the stable marriage problem," *ACM Transactions on Algorithms*, Vol. 3, Issue 3, Article No. 30, 2007.

[6] R. W. Irving, "Stable marriage and indifference," *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 48, pp. 261–272, 1994.

[7] R. W. Irving and D. F. Manlove, "Approximation algorithms for hard variants of the stable marriage and hospitals/residents problems," *Journal of Combinatorial Optimization*, Vol. 16, No. 3, pp. 279–292, 2008.

[8] R. W. Irving, D. F. Manlove, and G. O'Malley, "Stable marriage with ties and bounded length preference lists," In *Proc. of ACiD*, Texts in Algorithmics, College Publications, 2006.

[9] K. Iwama, D. F. Manlove, S. Miyazaki, and Y. Morita, "Stable marriage with incomplete lists and ties," In *Proc. of ICALP*, LNCS 1644, pp. 443–452, 1999.

[10] K. Iwama, S. Miyazaki and K. Okamoto, "A (2 $c \log N/N$)-approximation algorithm for the stable marriage problem, *IEICE Transactions*, Vol. 89-D(8), pp. 2380–2387 , 2006.

[11] K. Iwama, S. Miyazaki, N. Yamauchi, "A (2 $c\frac{1}{\sqrt{N}}$)-Approximation Algorithm for the Stable Marriage Problem," *Algorithmica*, Vol. 51(3), pp. 342–356, 2008.

[12] K. Iwama, S. Miyazaki, and N. Yamauchi, "A 1.875–approximation algorithm for the stable marriage problem," In *Proc. of SODA*, pp. 288–297, 2007.

[13] Z. Király, "Better and simpler approximation algorithms for the stable marriage problem," In *Proc. of ESA*, LNCS 5193, pp. 623–634, 2008.

[14] D. F. Manlove, R. W. Irving, K. Iwama, S. Miyazaki, and Y. Morita. "Hard variants of stable marriage," *Theoretical Computer Science*, Vol. 276, Issue 1–2, pp. 261–279, 2002.

[15] E. J. McDermid, "A 3/2-approximation algorithm for general stable marriage," In *Proc. of ICALP*, LNCS 5555, pp. 689–700, 2009.

[16] A. E. Roth, U. G. Rothblum, and J. H. V. Vate, "Stable matchings, optimal assignments, and linear programming," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 18, Issue 4, pp. 803–828, 1993.

[17] C.-P. Teo and J. Sethuraman, "The geometry of fractional stable matchings and its applications," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 23, Issue 4, pp. 874–891, 1998.

[18] C.-P. Teo, J. Sethuraman, and W. P. Tan, "Gale-Shapley stable marriage problem revisited: strategic issues and applications," In *Proc. of IPCO*, LNCS 1610, pp. 429–438, 1999.

[19] H. Yanagisawa, "Approximation Algorithms for Stable Marriage Problems," Ph. D. Thesis, Kyoto University, 2007.